



ASSOCIAZIONE SUBALPINA MATHESIS

GARA DI MATEMATICA PER IL PUBBLICO

20.esima edizione

Venerdì 3 marzo 2023

Problema 1 – Giochiamo in onore del numero 20

20 punti

In occasione della ventesima edizione delle Olimpiadi di Matematica, Gara del Pubblico, due organizzatori dell'evento giocano a dadi. Utilizzano un dado a forma di icosaedro regolare con facce numerate da 1 a 20 tali per cui la somma dei valori che si trovano in facce opposte dia 21. Lancia solo un giocatore: il valore che appare sulla faccia superiore del dado sarà il risultato del suddetto giocatore, il valore della faccia in basso su cui si appoggia il dado sarà abbinato al secondo giocatore.

Dopo 5 lanci la somma totalizzata dal primo giocatore è 58. Quant'è quella del secondo?

Problema 2 – Età di sorelle

25 punti

Due sorelle, Alba e Chiara, festeggiano oggi il loro compleanno comune, perché sono nate lo stesso giorno dello stesso mese. Alba è più giovane di 3 anni. Ad una domanda sulla sua età, Chiara risponde: "Alba è molto giovane perché conta meno anni di quanti ne avevamo insieme 10 anni fa. Per quello che mi riguarda sono vecchia, perché conto più anni di quanto ne avevamo insieme 10 anni fa. Inoltre il numero dei miei anni è un numero dispari". Qual è l'età di Alba?

Problema 3 – La gallina

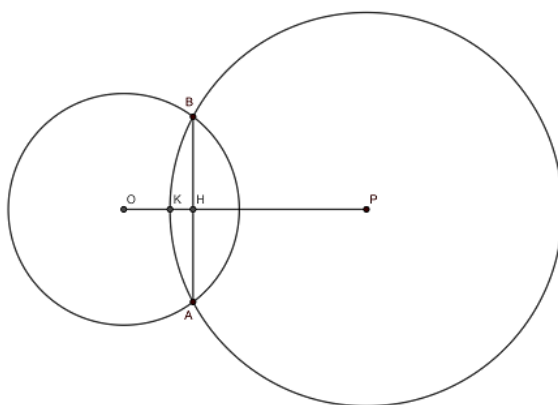
25 punti

Se una gallina e mezza fanno un uovo e mezzo in un giorno e mezzo, quante uova farà una gallina in sei giorni?

Problema 4 – Circonferenze secanti**30 punti**

Una circonferenza di centro O (vedi figura) e di raggio 5 è intersecata da una seconda circonferenza di centro P (esterno alla prima curva) nei punti A e B . Sia K il punto di intersezione della seconda curva con OP e H il punto comune a OP e ad AB . Si sa che è $\overline{OK} = 2$ e $\overline{BH} = 4$. Calcolare la lunghezza r del raggio della seconda circonferenza.

Dare come risposta la parte intera di $1000r$.

**Problema 5 – 2023 palline****35 punti**

In una scatola ci sono 2023 palline, numerate da 1 a 2023; ogni numero è presente su una e una sola pallina. Quante palline diverse dobbiamo estrarre, come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 48?

Problema 6 – Pubblico “anagrammato”**40 punti**

In riferimento alla “Gara del Pubblico” nell’ambito delle “Olimpiadi di Matematica” 2023, si propone il seguente sintetico quesito.

Nell’elenco in ordine alfabetico di tutti i suoi anagrammi, quale posizione occupa la parola PUBBLICO? Indicare le prime 4 cifre (da sinistra) del risultato.

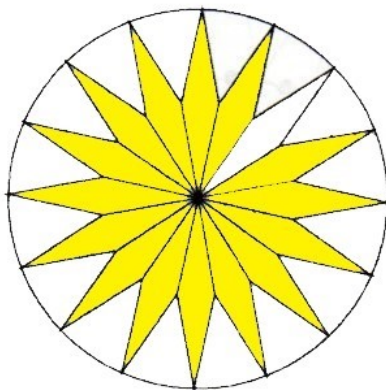
Problema 7 – Dimmi la tua potenza e ti dirò chi sei!**40 punti**

A una serata di gala per numeri famosi sono presenti π , e , $\sqrt{2}$, il numero d’oro e molti altri un po’ meno noti. Il giornalista incaricato di fare un servizio sull’evento vede un numero evidentemente irrazionale ma le cui cifre decimali non gli ricordano nulla di particolare. Incuriosito si avvicina e gli chiede quale sia il suo significato. Questa la sua risposta: “Io, se vengo elevato al mio quadrato e poi al mio cubo faccio esattamente 100”. Quali sono le prime 4 cifre decimali del numero intervistato?

Problema 8 – Pendaglio

45 punti

Enrica ha trovato in un cassetto un vecchio pendaglio circolare. In origine il pendaglio era formato da un filo di ferro (di massa trascurabile) disposto a formare una circonferenza di diametro 8 cm ; al suo interno erano posizionate a raggiera sedici pietre tagliate a forma di rombo. Purtroppo negli anni una delle pietre è andata perduta, come si vede nell'immagine.



A quanti centimetri di distanza dal centro geometrico del pendaglio si trova il suo centro di massa?

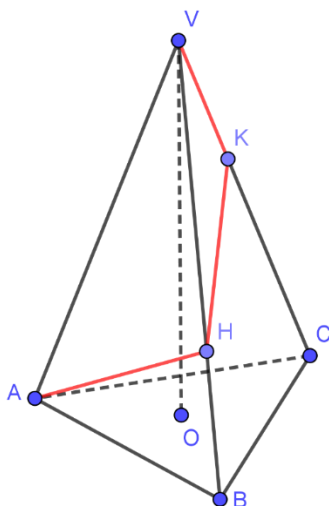
Rispondere con le prime quattro cifre dopo la virgola.

Problema 9 – Formica al tetraedro

45 punti

Una formichina, partendo da un vertice in basso di un tetraedro, sale sul solido percorrendo 3 segmenti, giacenti sulle facce, salendo ogni volta di un terzo dell'altezza (o dello spigolo), raggiungendo la punta della piramide. In figura la partenza è in A e l'arrivo nel vertice V.

Sapendo che la base del tetraedro è un triangolo equilatero di lato 3, che le facce laterali sono triangoli isosceli e che la sua altezza misura 6, calcolare la lunghezza del percorso della formica. Dare come risposta la parte intera del risultato moltiplicato per 1000.



Problema 10 – Caso 2023 per l'ispettore di M. Smullyan

45 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

- 1) Se A e B sono entrambi innocenti, allora C è innocente.
- 2) Se D è colpevole, almeno uno, tra A e C, è stato suo complice.
- 3) Se C è innocente, allora A è colpevole.
- 4) Se almeno uno fra B e D è colpevole, allora A è innocente.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità $P(A)$ che A sia colpevole.

Si ipotizzi l'equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.

Dare come risposta la parte intera di $1000 \times P(A)$.

Problema 11 – Gran Premio 2023

45 punti

Su un foglio a quadretti è riportato il tracciato di una pista automobilistica sulla quale si immagina disputarsi un Gran Premio. Il gioco si svolge così (vedi figura 1): a cominciare dalla linea di partenza/arrivo AB, in senso antiorario, si tracciano dei segmenti formando una spezzata il cui ultimo tratto tocca/taglia il traguardo. Ogni tratto parte e arriva al vertice di un quadretto. Il primo tratto, a partire da P, ricalca il lato di un quadrettino. I successivi tratti vengono realizzati così: si considera il prolungamento del tratto; il suo estremo è il punto comune a quattro quadretti; si unisce l'ultimo punto individuato ad un vertice di uno dei suddetti quadretti (figura 2). Si riesce così ad "accelerare" e a "rallentare" o a proseguire con "velocità" costante. Non si può uscire di pista, pena squalifica, né sfiorarne il bordo: bisogna rimanere all'interno del percorso.

Qual è il numero minimo di segmenti, nella fattispecie, che consente di toccare/tagliare il traguardo?

Figura 1:

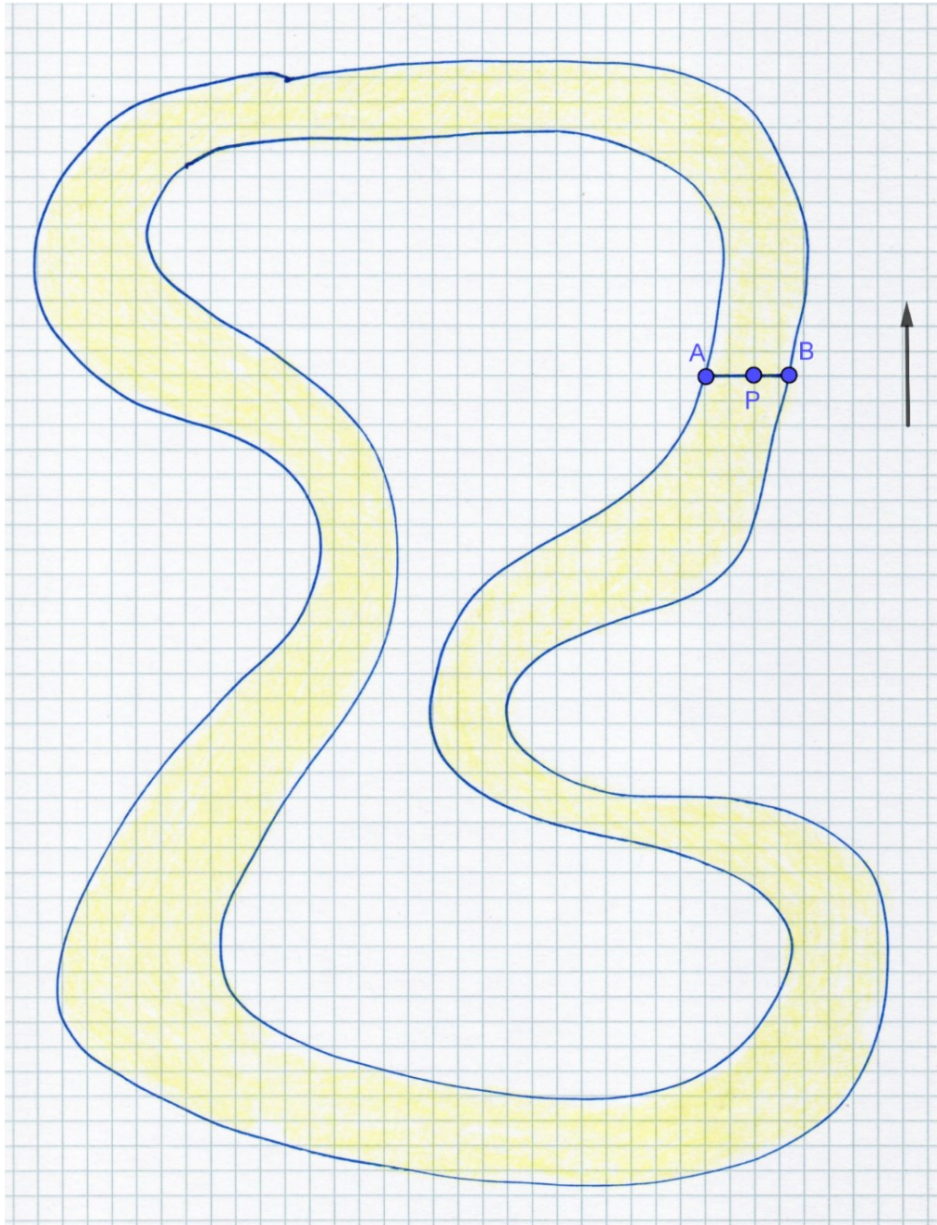
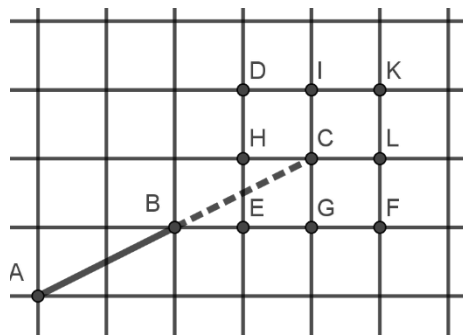


Figura 2:

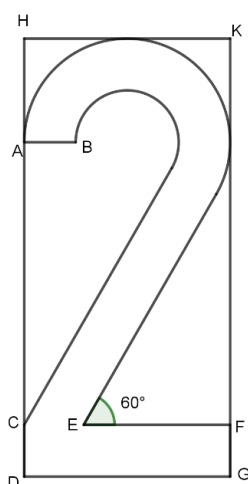


Sia, ad esempio, AB l'ultimo tratto. Da B si immagina di arrivare a C "ripetendo", sulla stessa direzione, l'ultimo segmento e si sceglie uno dei 9 punti (C, E, G, F, L, K, I, D, H) a cui congiungere B.

Problema 12 – Il numero 2

50 punti

Per disegnare il numero “2” (o, meglio, la cifra 2) si è costruito il rettangolo DGKH (vedi figura) di base DG lunga 4. Si sono tracciati due archi concentrici di circonferenza rispettivamente di raggi di misura 1 e 2. L’arco maggiore è tangente a tre lati del rettangolo. Vi figurano due segmenti obliqui fra loro paralleli (che descrivono la parte centrale del “2”), tangenti ognuno ad un proprio arco di cui sopra. Da C, intersezione della tangente all’arco minore con il lato HD, si traccia la parallela ad HK (e a DG) che incontra in E la tangente all’arco maggiore e in F il lato KG. Si costruisce pure AB // EF. Il disegnatore ha fatto in modo che sia 1 la lunghezza di FG (e ha cancellato il segmento CE per realizzare correttamente la figura della cifra 2). Si sa infine che l’angolo acuto in E vale 60° . Calcolare l’area della figura mistilinea (BAEFGDC) che rappresenta in nostro “2”. Si ponga $\pi = 3,14$ e $\sqrt{3} = 1,73$. Si dia come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato omettendo la virgola.



Problema 13 – Le lampadine

50 punti

Vi sono 9999 lampadine, numerate da 1 in poi, ciascuna delle quali viene accesa e spenta premendo un normale interruttore. All’inizio tutte le lampadine sono spente; poi si premono una volta tutti gli interruttori delle lampadine contrassegnate dai multipli di 1 (di conseguenza tutte le lampadine vengono accese), successivamente vengono premuti una volta gli interruttori di tutte quelle di posto pari (multipli di 2), poi quelle contrassegnate con multipli di 3, successivamente si cambiano di stato quelle relative ai multipli di 4 e così via, sino ai multipli di 9999. Qual è la lampadina col numero più alto che resta accesa alla fine delle operazioni?

Problema 14 – Preliminari di scopone scientifico

55 punti

Nel gioco dello **scopone scientifico** (4 giocatori, 2 contro 2), per l'assegnazione del "mazziere" (cioè di chi "dà" per primo le carte, nel senso che le mischia, le distribuisce ed è l'ultimo, nel giro, a giocare la sua carta) si usa, tra due sfidanti qualunque (uno per una coppia ed uno per l'altra) estrarre a turno una carta da un mazzo di 40 carte. L'estrazione avviene "senza reimbussolamento", cioè un giocatore estrae una carta, la posa sul tavolo e l'avversario ne sceglie una delle restanti. Qui non si tiene conto dei "valori" delle carte suddette, ma si chiede solo quale sia la **probabilità** che l'avversario (secondo che estrae la carta) peschi una carta dello stesso valore (esempio di esito: due "Re", due "Tre", ecc.) e che ciò succeda per tre volte consecutive. Si tenga conto che le carte "paritetiche" sono a gruppi di quattro. Dare come risposta il reciproco del valore della suddetta probabilità.

Problema 15 – Formica all'icosaedro

55 punti

Una formichina, partendo da un vertice di un icosaedro regolare, vuole raggiungere il vertice opposto. Lo spigolo del solido platonico misura 5. Quanto è lungo il percorso minimo che l'animaletto farà?

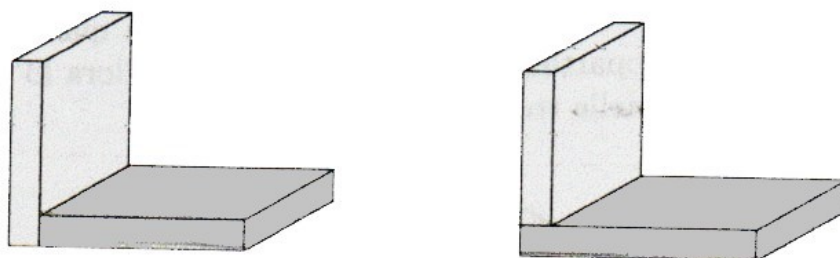
Utilizzare approssimazioni alla seconda cifra decimale (con le solite regole). Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato ottenuto omettendo la virgola.

Problema 16 – Bricolage

55 punti

Marzia vuole costruire una scatola (senza coperchio) tagliando delle dimensioni opportune cinque tavole rettangolari di legno e incollandole tra loro.

Nel progettare i tagli, riflette che due tavole possono essere incollate tra di loro in due maniere diverse.



In quante maniere diverse può tagliare e incollare le cinque tavole di legno (senza ruotare la scatola e senza dimenticare i vertici)?

Problema 17 – Calcolo enigmatico 2023**60 punti**

$$ABB - BC = ADC$$

$$\times \quad \quad \quad : \quad \quad \quad -$$

$$EF \times G = HG$$

$$FEGCB : EB = CCF$$

A lettera uguale corrisponde cifra uguale (e a lettera diversa cifra diversa). La prima cifra non è mai lo zero (come semplicità comanda). Quale numero corrisponde alla stringa AFGB?

Problema 18 – Scommesse al Casinò Bernoulli**60 punti**

Al Casinò Bernoulli si può partecipare a un singolare gioco delle monete. Si estraggono delle monete in sequenza e si va avanti fin tanto che le monete lanciate alternano la faccia (testa, croce, testa,... oppure croce, testa, croce,...). Appena escono in successione due facce uguali il gioco si interrompe e l'ultima moneta viene scartata. Il giocatore vince una quantità di euro uguale alla lunghezza della catena di monete che si è creata. Quindi la sequenza TC frutta 2 euro, quello CTC 3 euro, quella TCTC 4 euro e così via. Se le prime due monete lanciate sono uguali tra loro (TT o CC) non si vince nulla. Vi sembra un gioco conveniente? Lo è, a patto che il costo per partecipare sia inferiore a X centesimi di euro. Quanto vale X?

Problema 19 – Battaglia navale**65 punti**

In una variante del gioco della battaglia navale, Luigi posiziona una portaerei (che possiamo pensare come un rettangolo 5×1) in una griglia 12×12 , indifferentemente in verticale o in orizzontale. Luisa prova a colpire la portaerei, dicendo di volta in volta le coordinate di un quadretto della griglia. Se il quadretto chiamato è uno di quelli coperti dalla portaerei, il gioco termina.

Quanti tentativi deve fare come minimo Luisa per colpirla sicuramente?

Problema 20 – Polinomio del ventennio**75 punti**

Considerato il polinomio $P(x)$, ottenuto facendo il prodotto dei 2023 polinomi

$$x + 1, x^2 + 2, \dots, x^{2022} + 2022 \text{ e } x^{2023} + 2023$$

con quanti zeri termina la somma dei coefficienti e del termine noto del polinomio $P(x)$?